I （1ページ目） 解答は，途中計算や思考過程を含めて３ページ分の枠内に丁寧に記入すること。

（1ページ目）

まず接線lを求める。$f'(x)=3x^2-6px$であるから、曲線$y=f(x)$上の点$(b, f(b))$における接線の方程式は、

$$y=f'(b)(x-b)+f(b)=(3b^2-6pb)(x-b)+(b^3-3pb^2)$$

すなわち

$$y=(3b^2-6pb)x-2b^3+3pb^2 \quad —①$$

である。①が、$A(0,-27p^3)$を通るための条件は

$$-27p^3=-2b^3+3pb^2$$

すなわち

$$2b^3-3pb^2-27p^3=0 \quad —②$$

である。

$$2b^3-3pb^2-27p^3=(b-3p)(2b^2+3pb+9p^2)$$

かつ、$2b^2+3pb+9p^2=2(b+\frac{3}{4}p)^2+\frac{63}{8}p^2>0$より

②をみたすbは、$b=3p$である。よって、lの方程式は、

$$y=9p^2x-27p^3 \quad —③$$

である。接点Bの座標は

$$B(3p, 0) \quad —④$$

である。

（2ページ目へつづく）

（2ページ目）

次に直線mを求める。問題文の条件$p>0$より接線lの傾き$9p^2$は0ではない。したがって、直線mの傾きは$-\frac{1}{9p^2}$である。mはB$(3p, 0)$を通るので、mの方程式は

$$y=-\frac{1}{9p^2}(x-3p)$$

すなわち

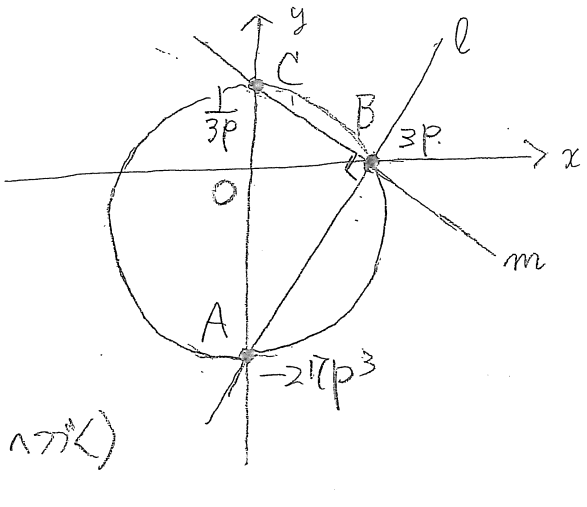
$$y=-\frac{1}{9p^2}x+\frac{1}{3p} \quad ―⑤$$

である。

三角形ABCの面積Sと、三角形ABCの外接円の面積Tを求める。直線mとy軸の交点Cの座標は⑤より

$$C\left(0, \frac{1}{3p}\right) \quad ―⑥$$

である。概形は次の図のようになる。



（3ページ目へつづく）

（3ページ目）

図より三角形ABCは底辺がACで高さがOBなので、三角形ABCの面積は

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot OB=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3p}+27p^3\right)3p \quad \text{—⑦}$$

である。さらに、図より三角形ABCはACを斜辺とする直角三角形だから、その外接円の直径はACである。よって外接円の面積は

$$T=\pi\cdot\left(\frac{1}{2}AC\right)^2=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{3p}+27p^3\right)^2 \quad \text{—⑧}$$

である。⑦と⑧より

$$\frac{T}{S}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{3p}+27p^3\right)\frac{1}{3p}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{9p^2}+9p^2\right) \quad \text{—⑨}$$

である。$9p^2>0$，$\frac{1}{9p^2}>0$より、相加平均≧相乗平均の関係を$\frac{T}{S}$に用いると、

$$\frac{T}{S}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{9p^2}+9p^2\right)\geqq\pi\sqrt{\frac{1}{9p^2}\cdot 9p^2}=\pi \quad \text{—⑩}$$

である。等号成立条件は$\frac{1}{9p^2}=9p^2$であり、$p>0$でこの条件をみたすのは、$p=\frac{1}{3}$のときである。したがって、$\frac{T}{S}$は$p=\frac{1}{3}$のとき最小値πをとる。

下の空欄には何も記入しないこと