I（配点 50）

次の $\boxed{}$ にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

ただし，分数形で解答する場合は，既約分数にすること。

[1] 1，2，5 の数字を書いたカードが，それぞれ，5 枚，2 枚，1 枚入っている箱があり，この中から 3 枚取り出すとする。ただし，どのカードを取り出す事象も同様に確からしいとする。

(1) 3 枚とも 1 のカードである確率は $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) すべてが違う数のカードになる確率は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(3) 5 のカードを含む確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(4) 3 枚の合計数の種類は $\boxed{\text{エ}}$ 通りある。

(5) 3 枚の合計数の期待値は $\boxed{\text{オ}}$ である。

[2] 1 から 1000 までの整数のうち， 2, 3, 5 のすべてで割り切れるものの個数は $\boxed{\text{カ}}$ である。また， 2, 3, 5 のどれかで割り切れるものの個数は $\boxed{\text{キ}}$ である。

[3] (1) $2^{3\log_4 3}$ を簡単にすると， $\boxed{\text{ク}}$ である。

(2) 方程式 $\log_{10} x + 2\log_{10} y = 2$ において，x も y も整数であるとき，解は $\boxed{\text{ケ}}$ 個ある。

(3) 不等式 $2\log_{0.3}(2x-1) > \log_{0.3} 3 + \log_{0.3}(x+1)$ を解くと， $\boxed{\text{コ}}$ となる。

Ⅰの解答欄（指定欄以外は採点されない。）

ア:	イ:	ウ:	エ:
オ:	カ:	キ:	ク:
ケ:	コ:		

II (配点 50)

$\triangle$ABC において，辺 AB，AC の中点をそれぞれ D，E とし，辺 AB の垂直二等分線と $\triangle$ABC の外接円 O の C を含まない弧 AB との交点を F，辺 AC の垂直二等分線と外接円 O の B を含まない弧 AC との交点を G とする。そして，$\triangle$ABC の内接円の中心を I とする。以下は，

$$4\mathrm{DF}\cdot\mathrm{EG}=\mathrm{AI}^2$$

が成立することの証明である。$\angle\mathrm{CAB}=\alpha$，$\angle\mathrm{ABC}=\beta$，$\angle\mathrm{BCA}=\gamma$ とし，以下の $\boxed{}$ にあてはまる数または式を α，β，γ，π を用いて，最も簡単な形で解答欄に記入せよ。

証明： 線分 AI の中点を H とする。四角形 AFDH について，

$$\angle\mathrm{ADH}=\boxed{\text{ア}},\qquad \angle\mathrm{HAD}=\boxed{\text{イ}},\qquad \angle\mathrm{DAF}=\boxed{\text{ウ}}$$

であるから，

$$\angle\mathrm{HAF}+\angle\mathrm{FDH}=\boxed{\text{エ}}$$

となり，四角形 AFDH は円に内接する。よって，

$$\angle\mathrm{AFH}=\boxed{\text{オ}}$$

であり，

$$\mathrm{DF}:\mathrm{AH}=\sin\boxed{\text{カ}}:\sin\boxed{\text{キ}}$$

となる。一方，四角形 AHEG についても，同様にして，

$$\angle\mathrm{GAE}=\boxed{\text{ク}},\qquad \angle\mathrm{HGA}=\boxed{\text{ケ}}$$

であるから，

$$\mathrm{AH}:\mathrm{EG}=\sin\boxed{\text{カ}}:\sin\boxed{\text{キ}}$$

ゆえに，$\mathrm{DF}\cdot\mathrm{EG}=\mathrm{AH}^2$，つまり，$4\mathrm{DF}\cdot\mathrm{EG}=\mathrm{AI}^2$ が成立する。

IIの解答欄（指定欄以外は採点されない。）

ア:	イ:	ウ:	エ:
オ:	カ:	キ:	ク:
ケ:			

III (配点 50)

n 個の実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ のうち，最大の数を $\max(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ で表し，最小の数を $\min(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ で表す。

次の $\boxed{}$ にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

ただし，分数形で解答する場合は，既約分数にすること。

[1]　数列 $\{x_n\}$ は，次の漸化式を満たすとする。

$$x_{n+3} = \max(0, x_{n+1}, x_{n+2}) - x_n \qquad (n \geqq 0)$$

このとき，$x_0 = 1, x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{3}$ とすると，

$x_3 = \boxed{ア}$，$x_4 = \boxed{イ}$ となり，また，$x_{10} = \boxed{ウ}$，$x_{100} = \boxed{エ}$ となる。

[2]　点 (x, y) が，次の不等式で表される領域を動くとする。

$$4 \leqq \max(x+y, x-y, -x+y, -x-y) \leqq 5$$

このとき，$x^2 + y^2 - 4x - 2y$ の最小値は $\boxed{オ}$ で，最大値は $\boxed{カ}$ である。

[3]

$$y = \min\left(\max\left(\frac{1}{2}x^2, x+4\right), \max(x^2 - 2x, -x+6)\right)$$

において，$y \leqq 5$ となる x の範囲は，$\boxed{キ}$ である。また，この関数のグラフと x 軸，y 軸および直線 $x = 5$ とで囲まれる部分の面積は，$\boxed{ク}$ である。

IIIの解答欄（指定欄以外は採点されない。）

ア:	イ:	ウ:	エ:
オ:	カ:	キ:	
ク:			

IV （配点 50）

次の $\boxed{}$ にあてはまる数または a, b, c で表される式を，解答欄に記入せよ。

四面体 OABC において，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = a,\ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = b,\ |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = c,\ |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{CA}}| = 1$$

とする。

(1)　3 点 A, B, C を通る平面に, 点 O から下ろした垂線の足を H とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表される。このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boxed{\text{ア}}$$

である。また，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}\left(\boxed{\text{イ}}\right), \qquad \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boxed{\text{ウ}}$$

が成り立ち, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ も a, b, c を用いて表されるので,

$$x = \frac{1}{3}\left(\boxed{\text{エ}}\right), \qquad y = \frac{1}{3}\left(\boxed{\text{オ}}\right)$$

(2)　さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であり，かつ，線分 AB の中点を中心とし半径が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である球面上に点 O があるときは

$$c - b = \boxed{\text{カ}}, \qquad a^2 + b^2 = \boxed{\text{キ}}$$

である。したがって, このとき 四面体 OABC の体積は，$a = \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{4}$ のときに最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{48}$ をとる。

IV の解答欄（指定欄以外は採点されない。）

ア:	イ:	ウ:

エ:	オ:

カ:	キ:	ク:

ケ:

問題訂正

数学

4ページ上から7行目

（誤）α，β，γ，$\underline{\pi}$を用いて

（正）α，β，γ<u>および円周率π</u>を用いて