２０２２年度〈一般B方式〉

数学　200点満点

【問題冊子】（１～12ページ）

（注　意）

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開かないこと。
2. 試験開始後、問題冊子のページ数(1～12ページ) を確認すること。
3. 各ページの余白を下書きに使用してもよい。
4. **試験時間**　15：00 ～ 16：30
5. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

(下書き用紙)

I (50点)

次の $\boxed{}$ にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

(1) a を整数とし，2つの3次関数

$$f(x) = x^3 + (a-8)x^2 + 10x + a - 11, \quad g(x) = x^3 + ax^2 - 16x + a + 9$$

を考える。$f(x)$ と $g(x)$ が共通の1次式で割り切れるのは，$a = \boxed{ア}$ のときである。$a = \boxed{ア}$ のとき，$g(x) = 0$ の解は，小さいほうから順に $\boxed{イ}$，$\boxed{ウ}$，$\boxed{エ}$ である。

(2) 座標平面において，円 C は第1象限に中心を持ち，2点 $\mathrm{O}(0,0)$，$\mathrm{A}(0,a)$ を通るとする。さらに，C 上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ $(x>0)$ について $\angle\mathrm{OPA} = \theta$（一定）をみたすとする。$m = \tan\theta$ とするとき，C の方程式を a と m を用いて表すと，

$$x^2 + y^2 - \boxed{オ}\,x - \boxed{カ}\,y = \boxed{キ}$$

である。

(3) $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ として $\left(\dfrac{1}{15}\right)^{10}$ を小数で表すとき，小数第 $\boxed{ク}$ 位に初めて0でない数字が現れる。その数字は $\boxed{ケ}$ である。

(4) 実数 x と y が，$0 \leqq x \leqq 2\pi$，$0 \leqq y \leqq 2\pi$，$\sin(x+y) = 1$ をみたすとする。式 xy^2 の値は，$(x,y) = \left(\boxed{コ}, \boxed{サ}\right)$ のとき最大になり，最大値は $\boxed{シ}$ である。

(下書き用紙)

II (50点)

座標空間において，以下のような直円柱Cを考える。直円柱Cの2つの底面のうち，ひとつはxy平面上にあり，中心が原点O$(0,0,0)$で半径が3の円とその内部である。この底面を以下では下面と呼ぶ。もうひとつの底面は，方程式$z=8$で表される平面上にあり，この底面を以下では上面と呼ぶ。座標が$(-3,0,0)$の点をAとするとき，以下の$\boxed{}$にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。なお，上面と側面の境界である円周は上面に含まれ，下面と側面の境界である円周は下面に含まれるとする。

(1) 点Aから上面上の点までの距離の最大値は$\boxed{ア}$であり，最小値は$\boxed{イ}$である。

(2) 点Aからの距離が9で，y座標が2である上面上の点Pのx座標は$\boxed{ウ}$である。

(3) 側面上の点Qから，xy平面に下ろした垂線をQHとし，x軸の0以上の部分から線分OHへの正の角をθ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$とする。ただし，Hがx軸の0以上の部分の上にあるときは$\theta=0$とする。このθを用いて，点Hのx座標は$\boxed{エ}$，y座標は$\boxed{オ}$と表される。点Aとの距離が9，y座標が正，z座標が7となる点Qの座標は$\left(\boxed{カ}, \boxed{キ}, 7\right)$である。

(4) (2)で求めた点Pと(3)で求めた点Qについて，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$とベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$の内積$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$の値は$\boxed{ク}$である。

(下書き用紙)

III (50点)

座標平面において，$y = x^2$ で表される放物線 C_1 と，$y = -x^2 + 2px - p$ で表される放物線 C_2 を考える。ただし，$p > 0$ とする。以下の $\boxed{}$ にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

(1) C_1 と C_2 が共有点をもたないような p の範囲は $\boxed{ア}$ である。このとき，C_1 の頂点と C_2 の頂点を通る直線 ℓ の方程式は，$y = \boxed{イ}$ である。ℓ の傾きが正のとき，C_2 と ℓ で囲まれる部分の面積は $\boxed{ウ}$ である。また，ℓ の傾きが負のとき，C_2 と ℓ で囲まれる部分の面積は $\boxed{エ}$ である。

(2) C_1 と C_2 が異なる2つの共有点を持つような p の範囲は $\boxed{オ}$ である。このとき，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積は $\boxed{カ}$ である。

(3) C_1 と C_2 の共有点が1つだけであるような p の値は $\boxed{キ}$ である。このとき，共有点の座標は $\left(\boxed{ク}, \boxed{ケ}\right)$ である。共有点 $\left(\boxed{ク}, \boxed{ケ}\right)$ において，C_1 と C_2 の両方に接する直線の方程式は $y = \boxed{コ}$ である。

(下書き用紙)

IV (50点)

右に示すような3行3列からなる9個の白います目を用意し，以下に説明する試行を3回続けて行う。

	1列目	2列目	3列目
1行目			
2行目			
3行目			

(試行)　青と赤の2つのさいころを同時に投げる。青のさいころの目を b で，赤のさいころの目を r で表す。b と r の値に応じて，以下の (A) または (B) の操作をおこなう。

(A) $1 \leqq b \leqq 3$ かつ $1 \leqq r \leqq 3$ のとき，b 行 r 列目のます目が白ならば，そのます目を黒く塗る。b 行 r 列目のます目が黒ならば，何もしない。

(B) b と r の値のうち少なくともひとつが4以上ならば，何もしない。

3回の試行後に，ある行，ある列，またはある対角線に並んだ3つのます目がすべて黒いとき，そのパターンを「ビンゴ」と呼ぶことにする。以下の問いに答えよ。分数は既約分数で答えよ。

(1) 1行2列目のます目が黒いビンゴのパターンを，すべて解答用紙に記入せよ。

(2) 2行2列目のます目が黒いビンゴのパターンは $\boxed{\text{ア}}$ とおりである。

(3) 3行目がすべて黒いビンゴになる確率は $\boxed{\text{イ}}$ である。対角線のどちらかがすべて黒いビンゴになる確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(4) ます目がひとつも黒く塗られていない確率は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(5) 1回目の試行で1行1列目が塗られたとき，ビンゴになる条件付確率は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

(下書き用紙)

(下書き用紙)