2023年度〈一般B方式〉

数学　200点満点

【問題冊子】（1～12ページ）

（注　意）

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開かないこと。
2. 試験開始後、問題冊子のページ数(1～12ページ）を確認すること。
3. 問題冊子の各ページの余白を下書きに使用してもよい。
4. **試験時間　15：00～16：30**
5. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

(下書き用紙)

I (50点)

次の $\boxed{}$ にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。ただし，(1) については，解答用紙のグラフスペースにグラフを描け。

(1) O を原点とする座標平面における関数 $y = x^3 - 3x^2 + 4$ のグラフを，解答用紙のグラフスペースに描け。ただし，グラフは，その関数の極大値と極小値，およびそれらのときの x の値，y 軸との共有点，x 軸との共有点が読み取れるように描くこと。

(2) $2\log_{\frac{1}{4}} x > 1 + \log_{\frac{1}{4}}(5x+6)$ を満たす x の範囲は $\boxed{\text{ア}}$ である。また，対数の積 $\log_4 3 \cdot \log_5 16 \cdot \log_9 25$ に等しい整数は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(3) 座標平面において，放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x + a$ が相異なる 2 つの共有点を持つような a の範囲は $\boxed{\text{ウ}}$ である。このとき，2 つの共有点間の距離は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(4) $\sin x = a$ とおくとき，$\sin 3x$ は a の整式で $\boxed{\text{オ}}$ と表せて，$\sin 5x$ は a の整式で $\boxed{\text{カ}}$ と表せる。

(下書き用紙)

II (50点)

座標空間において，3 点 $\mathrm{O}(0,0,0)$，$\mathrm{A}(1,1,1)$，$\mathrm{B}(-1,0,1)$ を考える。以下の $\boxed{}$ にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

(1) 平面 OAB 上の点 C を，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ （s，t は実数）と表すとき，C の座標は s，t を用いて $\left(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}, \boxed{\text{ウ}}\right)$ と表される。

(2) 平面 OAB 上で，3 点 A，B，D が一直線上にあるような点 D を考える。ただし，D と A が一致，または D と B が一致する場合も，3 点は一直線上にあると考える。$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$ が最小になるような D の座標は $\left(\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}}\right)$ である。このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}| = \boxed{\text{キ}}$ である。

(3) 点 $\mathrm{E}(3,2,7)$ と平面 OAB 上の点 F について，$\overrightarrow{\mathrm{EF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$ が同時に成り立つような F の座標は $\left(\boxed{\text{ク}}, \boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}}\right)$ である。

(4) 平面 OAB 上の点 G と (3) で与えた点 E および (3) で答えた点 F について，$|\overrightarrow{\mathrm{EG}}| = \ell$ とおくとき，$|\overrightarrow{\mathrm{FG}}|$ は ℓ を用いて $|\overrightarrow{\mathrm{FG}}| = \boxed{\text{サ}}$ と表される。ただし，点 G は点 F と異なるとする。

(下書き用紙)

III (50点)

座標平面において，t と共に変化する点 $\mathrm{P}(f(t),\, g(t))$ を考える。ただし，t は実数の範囲で変化するものとする。以下において，a，b は正の定数で，c は $0 < c < a$ を満たす定数とする。以下の $\boxed{}$ にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

(1) 関数 $f(t)$ が条件 $f'(t) = \sqrt{a-c}$，$f(0) = 0$ をみたすとき，$f(t) = \boxed{\text{ア}}$ である。また，関数 $g(t)$ が条件 $g'(t) = -bt$，$g(0) = c$ をみたすとき，$g(t) = \boxed{\text{イ}}$ である。

(2) (1) で求めた $f(t)$ と $g(t)$ について，$A\{(f'(t))^2 + (g'(t))^2\} + Bg(t) = 1$ が t に関して恒等式になるような定数 A と B は，a，b，c を用いて $A = \boxed{\text{ウ}}$，$B = \boxed{\text{エ}}$ と表される。

(3) (1) で求めた $f(t)$ と $g(t)$ から定まる点 $\mathrm{P}(f(t), g(t))$ は，t が変化するとき，ある放物線の上を動くことがわかる。その放物線の方程式は $y = \boxed{\text{オ}}$ である。

(4) (3) で求めた放物線 $y = \boxed{\text{オ}}$ と x 軸の正の部分との交点の x 座標は $\boxed{\text{カ}}$ である。c の値が $0 < c < a$ の範囲で変化するとき，$\boxed{\text{カ}}$ の値は $c = \boxed{\text{キ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ク}}$ をとる。

(5) 第 1 象限の点 $\mathrm{Q}(p, q)$ が (3) で求めた放物線 $y = \boxed{\text{オ}}$ 上にあり，かつ，点 Q における放物線の接線が，原点 O と点 Q を通る直線に直交するとき，q は a，b，c を用いて $q = \boxed{\text{ケ}}$ と表される。

(下書き用紙)

IV (50点)

$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲の x に対して，関数

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ 2(1-x) & \left(\dfrac{1}{2} < x \leqq 1\right) \end{cases}$$

を考える。1 つの硬貨を 3 回続けて投げる試行を行い，k 回目（$k = 1, 2, 3$）に表が出たならば $a_k = 1$，裏が出たならば $a_k = 0$ とする。a_1，a_2，a_3 を用いて，数 a を

$$a = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{8}$$

で定める。以下の $\boxed{}$ にあてはまる数を解答欄に記入せよ。分数を答える場合は，既約分数にして答えよ。

(1) a のとりうる値の最小値は $\boxed{\text{ア}}$ で，最大値は $\boxed{\text{イ}}$ である。$\dfrac{1}{8} \leqq a \leqq \dfrac{3}{4}$ となる確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) $f(a)$ のとりうる値の最小値は $\boxed{\text{エ}}$ で，最大値は $\boxed{\text{オ}}$ である。$f(a) \geqq \dfrac{1}{2}$ となる確率は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(3) $f(a) \geqq \dfrac{1}{2}$ のときに，$a_1 = 0$ となる条件付き確率は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(4) $a_2 = 0$ のときに，$f(a) \geqq \dfrac{1}{2}$ となる条件付き確率は $\boxed{\text{ク}}$ である。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

(下書き用紙)

(下書き用紙)