I

問 1

As coloured printing became less expensive in the 1880s, Santa's red suit became the standard.

問 2

しかし、1931 年から 1964 年にかけて、そして再び 1980 年代から 1990 年代にかけておこなわれたコカ・コーラ社による広告キャンペーンほど、かの贈り物を届ける者のイメージに影響を与えたものはなかった。

（記入しないこと）			
1		2	

（記入しないこと）

問３

顔には白いひげをたくわえ、白い毛皮の縁取りで飾られた赤いジャケットを着ており、大きなお腹にベルトをしめ、赤いズボンと黒いブーツを履き、しばしば、白い毛皮で縁取られた赤い三角帽をかぶっているというイメージ。

（記入しないこと）	
3	

（記入しないこと）

問 4

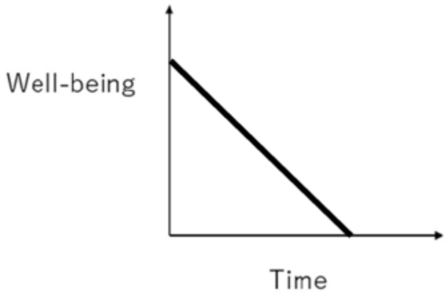
1	F
2	F
3	T
4	F
5	F

（記入しないこと）	
4	

（記入しないこと）

II

問 1



Alger Horatio

裕福に生まれながら、

貧困に至る人生。

問 2

In mathematical terms, the areas under the two lines are the same.

(記入しないこと)			
1		2	

(記入しないこと)

問 3

A	3
B	4

問 4

b ➡ c ➡ a

（記入しないこと）			
3		4	

（記入しないこと）

【Ｉ】(50 点)

解答欄

問 1	凝固点降下は溶質の種類には無関係で，溶液の質量モル濃度に比例する。したがって，塩化カルシウムの場合は，$CaCl_2$ が完全に電離すると粒子の数が 3 倍になるのに対し，塩化ナトリウムの場合は 2 倍にしかならないため，塩化カルシウムを散布した方が凝固点降下の効果が大きい。また，塩化カルシウムの方は発熱反応であるため，この点からも凍結防止剤としての効果が大きい。
問 2	葉物野菜は大部分が水で構成されているため、溶媒である水分を減らすことで溶質の濃度が上がる。さらに，水に溶けにくいデンプンを水に溶けやすい糖に分解して，溶質の分子の数を増やす。これらの現象により凝固点が降下するため，寒締め栽培された葉物野菜は冷気にさらしても凍りにくい。また，糖が生成するので甘くなる。

記述過程によって部分点を与える。

(記入しないこと)

(記入しないこと)

【Ⅱ】(50 点)

解答欄

問 1	ベンゼンの二重結合が一部水素化された 1,3-シクロヘキサジエンやシクロヘキセンはベンゼン環をもたないため特別な安定化を失っており，ベンゼンよりも水素化が進行しやすい。したがって，たとえ反応させるベンゼンの量を増やしても，1,3-シクロヘキサジエンやシクロヘキセンが得られることなく，シクロヘキサンのみが得られる。
問 2	ベンゼンは特別な安定化を得ているため、シクロヘキセンより反応性が低い。このため，ベンゼンの臭素化反応では活性化エネルギーが非常に大きくなり、触媒が必要となる。また，ベンゼンへ臭素が付加した臭素付加体は、ベンゼン環による特別な安定化を失っているため，比較的不安定な化合物である。一方，ベンゼンに臭素が置換して得られる臭素置換体は、依然としてベンゼン環を保持しており，特別な安定化を失うことなく得られる。したがって，特別な安定化を損なうことなく進行する置換反応が進行しやすい。

記述過程によって部分点を与える。

(記入しないこと)

(記入しないこと)

I (1)の解答ページ　途中計算や思考過程を含めて以下の枠内に丁寧に書け。

$f(x) = 3x^2 - 3$ であり、$f'(x) = 0$ となるのは、$3x^2 - 3 = 0$ の解 $x = -1, 1$ である。x が実数全体を動くときの増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗

よって $x = -1$ で極大値 2 をとり、$x = 1$ で極小値 -2 をとる。

（以下には記入しないこと）

I (1)

I (2) の解答ページ　途中計算や思考過程を含めて以下の枠内に丁寧に書け。

$x=-1$ 以外で $f(x)=2$ となる x は $f(x)=x^3-3x=2$ の解であり $x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)=0$ より、$x=2$ である。a の範囲を、$0<a<1$, $a=1$, $1<a\leqq 2$, $a>2$ で場合分けして、増減表を作ると以下のようになる

$0<a<1$　$M(a)=-a^3+3a$

x	$-a$	$\cdots$	a
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$-a^3+3a$	$\searrow$	a^3-3a

$a=1$　$M(1)=2$

x	-1		1
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	2	$\searrow$	-2

$1<a\leqq 2$　$M(a)=2$

x	$-a$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	a
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	a^3-3a

$1<a<2$ のとき $M(a)=2$
$a=2$ のとき $M(2)=2$

$a>2$　$M(a)=a^3-3a$

x	$-a$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	a
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\nearrow$	a^3-3a

以上まとめると

$$M(a)=\begin{cases} -a^3+3a & (0<a<1) \\ 2 & (1\leqq a\leqq 2) \\ a^3-3a & (a>2) \end{cases}$$

(以下には記入しないこと)

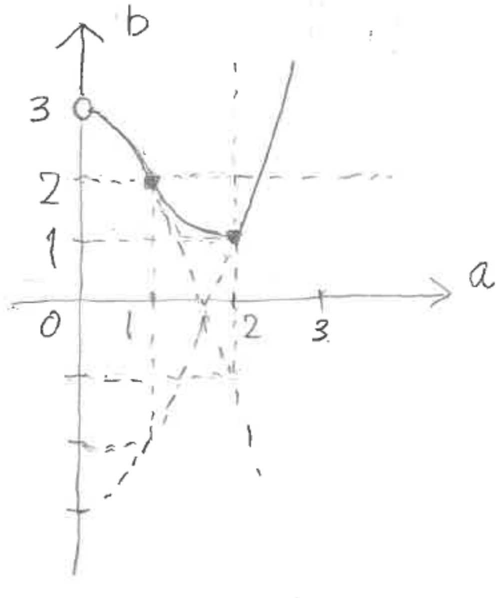
I (2)

I (3) の解答ページ　途中計算や思考過程を含めて以下の枠内に丁寧に書け。

(2) より

$$g(a) = \begin{cases} -a^2+3 & (0<a<1) \\ \dfrac{2}{a} & (1 \leqq a \leqq 2) \\ a^2-3 & (a>2) \end{cases}$$

である。　よって、グラフを描くと次のようになる。



グラフより $g(a)$ は $a=2$ のとき最小値 1 をとる。

(以下には記入しないこと)

I (3)

Ⅱ(1)の解答ページ　途中計算や思考過程を含めて以下の枠内に丁寧に書け。

Cは直線OBについてAと対称であるから、
$\overrightarrow{AC}$と$\overrightarrow{OB}$は直交する。$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OB}$を計算すると、

$(\cos\gamma-\cos\alpha, \sin\gamma-\sin\alpha)\cdot(\cos\beta, \sin\beta)$

$=(\cos\gamma\cos\beta+\sin\gamma\sin\beta)-(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$=\cos(\gamma-\beta)-\cos(\beta-\alpha)=0$ となる。

すなわち、

$\cos(\gamma-\beta)=\cos(\beta-\gamma)$ —— ①

である。①が成り立つのは、nを整数とするときに、

$\gamma-\beta=\beta-\alpha+2\pi n$ または $\gamma-\beta=-(\beta-\alpha)+2\pi n$

のときである。$0<\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}$のときに、$0<\gamma-\beta<\frac{\pi}{2}$を
みたすγは、$\gamma-\beta=\beta-\alpha$のときである。

$\gamma-\beta=\beta-\alpha$のとき、二等辺三角形OACにおいて、∠AOCの
2等分線は直線OBとなるので、$\gamma-\beta=\beta-\alpha$は
題意をみたす。よって $\gamma=2\beta-\alpha$ である。

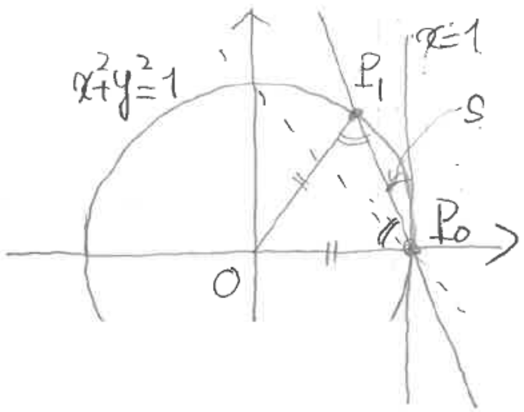
(注) 図で考察する場合は、3点A, B, Cを
右回りにα回転させて、$A=(1,0)$ $(\alpha=0)$としても
一般性を失わない等を説明する必要がある。

(以下には記入しないこと)

Ⅱ(1)

Ⅱ(2)の(i)の解答ページ　途中計算や思考過程を含めて以下の枠内に丁寧に書け。

問題文で与えられた条件より、P_0とP_1の位置関係は以下の図のようになる。



図より $OP_0=OP_1$ であるから $\triangle P_0OP_1$ は底辺を P_0P_1 とする二等辺三角形である。

$\angle OP_0P_1=\angle OP_1P_0=\frac{\pi}{2}-s$ であるから

$\angle P_0OP_1=\pi-2(\frac{\pi}{2}-s)=2s$ である。よって

P_1の座標は $(\cos 2s, \sin 2s)$ である。

$0<s<\frac{\pi}{4}$ より　$0<2s<\frac{\pi}{2}$ である。$\theta_1=2s$ と選ぶと、$\theta_1-\theta_0=2s$ は $0<\theta_1-\theta_0<\frac{\pi}{2}$ をみたす。よって $\theta_1=2s$ である。

(以下には記入しないこと)

Ⅱ(2)(i)

Ⅱ(2)の(ii)の解答ページ　途中計算や思考過程を含めて以下の枠内に丁寧に書け。

$P_{n-1}(\cos\theta_{n-1}, \sin\theta_{n-1})$, $P_n(\cos\theta_n, \sin\theta_n)$,
$P_{n+1}(\cos\theta_{n+1}, \sin\theta_{n+1})$について、$0<\theta_n-\theta_{n-1}<\frac{\pi}{2}$
となっているので、それぞれの点を(1)のA, B, C
に対応させられる。よって、$\theta_{n+1}=2\theta_n-\theta_{n-1}$
である。この式は隣接3項間の式に見えるが
$\theta_{n+1}-\theta_n=\theta_n-\theta_{n-1}$ と変形することで、
$\theta_{n+1}-\theta_n=\theta_n-\theta_{n-1}=\cdots=\theta_1-\theta_0=2S$
が得られる。よって θ_{n+1}とθ_nの間の漸化式
$\theta_{n+1}-\theta_n=2S$ が得られる。
この漸化式は公差$2S$の等差数列の
ものであるから、nが0から始まることに注意すると、

$$\theta_n=2Sn$$

である。

(以下には記入しないこと)

Ⅱ(2)(ii)

(ii)で求めた一般項 $\theta_n = 2sn$ であることと、

$0 < \theta_j < 2\pi$ $(j = 1, 2, \cdots, k-1)$ より、P_k が

P_0 と一致するのは $\theta_k = 2sk = 2\pi$ のとき

である。$s = \frac{\pi z}{180}$ より $\frac{2\pi zk}{180} = 2\pi$

すなわち、$zk = 180$ が成り立つ。この式は

z が 180 の約数であることを意味している。

44 以下の 180 の約数は

1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18,

20, 30, 36

で合計 14 個である。これらを z とするとき

$k = \frac{180}{z}$ は 3 以上となり題意をみたす。よって

このような z が書かれたカードを引く

確率は $\frac{14}{44} = \frac{7}{22}$ である。