

I

問 1

|                                                                  |
|------------------------------------------------------------------|
| As coloured printing became less expensive in the 1880s, Santa's |
| red suit became the standard.                                    |
|                                                                  |

問 2

|                                         |
|-----------------------------------------|
| しかし、1931 年から 1964 年にかけて、そして再び 1980 年代から |
| 1990 年代にかけておこなわれたコカ・コーラ社による広告キャンペ       |
| ンほど、かの贈り物を届ける者のイメージに影響を与えたものはな          |
| かった。                                    |

|           |  |   |  |
|-----------|--|---|--|
| (記入しないこと) |  |   |  |
| 1         |  | 2 |  |

|           |
|-----------|
| (記入しないこと) |
|-----------|

問3

顔には白いひげをたくわえ、白い毛皮の縁取りで飾られた赤いジャケットを着ており、大きなお腹にベルトをしめ、赤いズボンと黒いブーツを履き、しばしば、白い毛皮で縁取られた赤い三角帽をかぶっているというイメージ。

(記入しないこと)

3

(記入しないこと)

問 4

|   |   |
|---|---|
| 1 | F |
| 2 | F |
| 3 | T |
| 4 | F |
| 5 | F |

|           |  |
|-----------|--|
| (記入しないこと) |  |
| 4         |  |

|           |
|-----------|
| (記入しないこと) |
|-----------|

II

問 1

|                                                                                   |                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
|  | <p>裕福に生まれながら、</p> <p>貧困に至る人生。</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|

問 2

|                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------|
| <p>In mathematical terms, the areas under the two lines are the same.</p> |
|---------------------------------------------------------------------------|

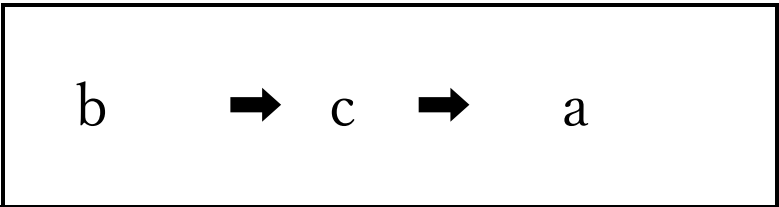
| (記入しないこと) |  |   |  |
|-----------|--|---|--|
| 1         |  | 2 |  |

| (記入しないこと) |
|-----------|
|           |

問 3

|   |   |
|---|---|
| A | 3 |
| B | 4 |

問 4



| (記入しないこと) |  |   |  |
|-----------|--|---|--|
| 3         |  | 4 |  |

|           |
|-----------|
| (記入しないこと) |
|-----------|

【 I 】 (50 点)

解答欄

|     |                                                                                                                                                                                               |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 問 1 | 凝固点降下は溶質の種類には無関係で、溶液の質量モル濃度に比例する。したがって、塩化カルシウムの場合は、 $\text{CaCl}_2$ が完全に電離すると粒子の数が 3 倍になるのに対し、塩化ナトリウムの場合は 2 倍にしかならないため、塩化カルシウムを散布した方が凝固点降下の効果大きい。また、塩化カルシウムの方は発熱反応であるため、この点からも凍結防止剤としての効果大きい。 |
| 問 2 | 葉物野菜は大部分が水で構成されているため、溶媒である水分を減らすことで溶質の濃度が上がる。さらに、水に溶けにくいデンプンを水に溶けやすい糖に分解して、溶質の分子の数を増やす。これらの現象により凝固点が降下するため、寒締め栽培された葉物野菜は冷気にさらしても凍りにくい。また、糖が生成するので甘くなる。                                        |

記述過程によって部分点を与える。

|           |  |  |  |
|-----------|--|--|--|
| (記入しないこと) |  |  |  |
|-----------|--|--|--|

|           |
|-----------|
| (記入しないこと) |
|-----------|

【Ⅱ】(50 点)

解答欄

|     |                                                                                                                                                                                                                                              |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 問 1 | ベンゼンの二重結合が一部水素化された 1,3-シクロヘキサジエンやシクロヘキセンはベンゼン環をもたないため特別な安定化を失っており、ベンゼンよりも水素化が進行しやすい。したがって、たとえ反応させるベンゼンの量を増やしても、1,3-シクロヘキサジエンやシクロヘキセンが得られることなく、シクロヘキサンのみが得られる。                                                                                |
| 問 2 | ベンゼンは特別な安定化を得ているため、シクロヘキセンより反応性が低い。このため、ベンゼンの臭素化反応では活性化エネルギーが非常に大きくなり、触媒が必要となる。また、ベンゼンへ臭素が付加した臭素付加体は、ベンゼン環による特別な安定化を失っているため、比較的不安定な化合物である。一方、ベンゼンに臭素が置換して得られる臭素置換体は、依然としてベンゼン環を保持しており、特別な安定化を失うことなく得られる。したがって、特別な安定化を損なうことなく進行する置換反応が進行しやすい。 |

記述過程によって部分点を与える。

(記入しないこと)

(記入しないこと)

I (1)の解答ページ 途中計算や思考過程を含めて以下の枠内に丁寧に書け。

$f(x) = 3x^2 - 3$  であり、 $f'(x) = 0$  とするのは、  
 $3x^2 - 3 = 0$  の解  $x = -1, 1$  である。 $x$  が  
実数全体を動くときの増減表は次のように  
なる。

|         |     |         |     |          |     |
|---------|-----|---------|-----|----------|-----|
| $x$     | ... | -1      | ... | 1        | ... |
| $f'(x)$ | +   | 0       | -   | 0        | +   |
| $f(x)$  | ↗   | 極大<br>2 | ↘   | 極小<br>-2 | ↗   |

よって  $x = -1$  で 極大値 2 をとり、  
 $x = 1$  で 極小値 -2 をとる。

(以下には記入しないこと)

I (1)

$x = -1$  以外で  $f(x) = 2$  とする  $x$  は  $f(x) = x^3 - 3x = 2$  の解であり  $x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2) = 0$  より、  
 $x = 2$  である。  $a$  の範囲を、  $0 < a < 1$ ,  $a = 1$ ,  $1 < a \leq 2$ ,  $a > 2$  で場合分けして、増減表を作ると以下の  
 ようになる

$0 < a < 1$   $M(a) = -a^3 + 3a$   $a = 1$   $M(1) = 2$

| $x$     | $-a$        | $\dots$    | $a$        |
|---------|-------------|------------|------------|
| $f'(x)$ | -           | -          | -          |
| $f(x)$  | $-a^3 + 3a$ | $\searrow$ | $a^3 - 3a$ |

| $x$     | $-1$ | $1$           |
|---------|------|---------------|
| $f'(x)$ | 0    | 0             |
| $f(x)$  | 2    | $\searrow$ -2 |

$1 < a \leq 2$   $M(a) = 2$

| $x$     | $-a$       | $\dots$ | $-1$       | $\dots$ | $1$        | $\dots$    | $a$ |
|---------|------------|---------|------------|---------|------------|------------|-----|
| $f'(x)$ | +          | +       | 0          | -       | 0          | +          | +   |
| $f(x)$  | $\nearrow$ | 2       | $\searrow$ | -2      | $\nearrow$ | $a^3 - 3a$ |     |

$1 < a < 2$  のとき

$M(a) = 2$

$a = 2$  のとき

$M(2) = 2$

$a > 2$   $M(a) = a^3 - 3a$

| $x$     | $-a$       | $\dots$ | $-1$       | $\dots$ | $1$        | $\dots$ | $2$        | $\dots$    | $a$ |
|---------|------------|---------|------------|---------|------------|---------|------------|------------|-----|
| $f'(x)$ | +          | +       | 0          | -       | 0          | +       | +          | +          | +   |
| $f(x)$  | $\nearrow$ | 2       | $\searrow$ | -2      | $\nearrow$ | 2       | $\nearrow$ | $a^3 - 3a$ |     |

以上よりまとめると

$$M(a) = \begin{cases} -a^3 + 3a & (0 < a < 1) \\ 2 & (1 \leq a \leq 2) \\ a^3 - 3a & (a > 2) \end{cases}$$

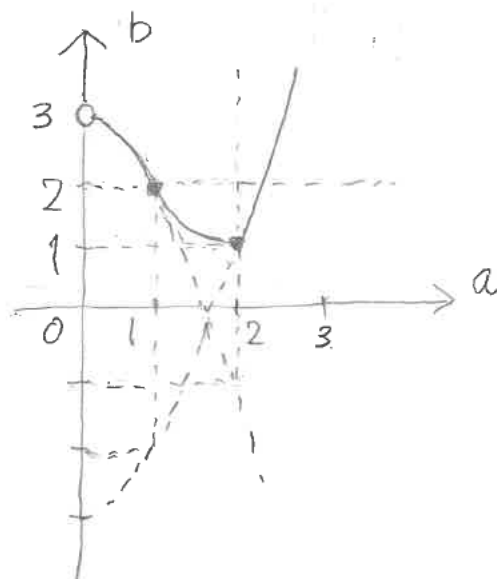
(以下には記入しないこと)

I (2)

(2) より

$$g(a) = \begin{cases} -a^2 + 3 & (0 < a < 1) \\ \frac{2}{a} & (1 \leq a \leq 2) \\ a^2 - 3 & (a > 2) \end{cases}$$

である。よって、グラフを描くと次のようになる。



グラフより  $g(a)$  は  $a=2$  のとき  
最小値 1 をとる。

(以下には記入しないこと)

II (1)の解答ページ

途中計算や思考過程を含めて以下の枠内に丁寧に書け。

Cは直線OBについてAと対称であるから、  
 $\vec{AC}$ と $\vec{OB}$ は直交する。 $\vec{AC} \cdot \vec{OB}$ を計算すると、

$$\begin{aligned} & (\cos \gamma - \cos \alpha, \sin \gamma - \sin \alpha) \cdot (\cos \beta, \sin \beta) \\ &= (\cos \gamma \cos \beta + \sin \gamma \sin \beta) - (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= \cos(\gamma - \beta) - \cos(\beta - \alpha) = 0 \quad \text{となる。} \end{aligned}$$

すなわち、

$$\cos(\gamma - \beta) = \cos(\beta - \alpha) \quad \text{--- ①}$$

である。①が成り立つのは、 $n$ を整数とすると、

$$\gamma - \beta = \beta - \alpha + 2\pi n \quad \text{または} \quad \gamma - \beta = -(\beta - \alpha) + 2\pi n$$

のときである。 $0 < \beta - \alpha < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $0 < \gamma - \beta < \frac{\pi}{2}$ と  
 みたす $\gamma$ は、 $\gamma - \beta = \beta - \alpha$ のときである。

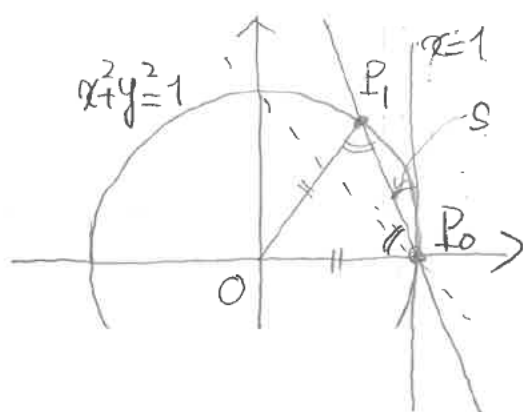
$\gamma - \beta = \beta - \alpha$ のとき、二等辺三角形OACにおいて、 $\angle AOC$ の  
 二等分線は直線OBとなるので、 $\gamma - \beta = \beta - \alpha$ は  
 題意をみたす。よって  $\gamma = 2\beta - \alpha$  である。

(注) 図で考える場合は、3点A, B, Cを  
 右回りに $\alpha$ 回転させて、 $A \in (1, 0)$  ( $\alpha = 0$ )にして  
 一般性を失わない等を説明する必要がある。

(以下には記入しないこと)

II (1)

問題文で与えられた条件より、 $P_0$ と $P_1$ の位置関係は以下の図のようにする。



図より  $OP_0 = OP_1$  であるから  $\triangle OP_0P_1$  は底辺を  $P_0P_1$  とする二等辺三角形である。

$$\angle OP_0P_1 = \angle OP_1P_0 = \frac{\pi}{2} - S \text{ であるから}$$

$$\angle P_0OP_1 = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - S\right) = 2S \text{ である。よって}$$

$P_1$  の座標は  $(\cos 2S, \sin 2S)$  である。

$$0 < S < \frac{\pi}{4} \text{ より } 0 < 2S < \frac{\pi}{2} \text{ である。} \theta_1 = 2S \text{ と}$$

選ぶと、 $\theta_1 - \theta_0 = 2S$  は  $0 < \theta_1 - \theta_0 < \frac{\pi}{2}$  をみたす。よって  $\theta_1 = 2S$  である。

(以下には記入しないこと)

II (2)(i)

$P_{n-1}(\cos \theta_{n-1}, \sin \theta_{n-1})$ ,  $P_n(\cos \theta_n, \sin \theta_n)$ ,  
 $P_{n+1}(\cos \theta_{n+1}, \sin \theta_{n+1})$  について、 $0 < \theta_n - \theta_{n-1} < \frac{\pi}{2}$   
と仮定しているため、それぞれ点  $P$  (1) の  $A, B, C$   
に 대응させられる。よって、 $\theta_{n+1} = 2\theta_n - \theta_{n-1}$   
である。この式は隣接3点間の式に見える。  
 $\theta_{n+1} - \theta_n = \theta_n - \theta_{n-1}$  と変形することで、  
 $\theta_{n+1} - \theta_n = \theta_n - \theta_{n-1} = \dots = \theta_1 - \theta_0 = 2S$   
が得られる。よって  $\theta_{n+1}$  と  $\theta_n$  の間の漸化式  
 $\theta_{n+1} - \theta_n = 2S$  が得られる。  
この漸化式は、公差  $2S$  の等差数列の  
ものであるから、 $n$  が  $0$  から始まることに注意すると、  
$$\theta_n = 2Sn$$
  
である。

(以下には記入しないこと)

II (2)(ii)

(ii) で求めた一般項  $\theta_n = 2sn$  であることと、

$0 < \theta_j < 2\pi$  ( $j=1, 2, \dots, k-1$ ) より、 $P_k$  と

$P_0$  と一致するのは、 $\theta_k = 2sk = 2\pi$  のとき

である。 $s = \frac{\pi Z}{180}$  より  $\frac{2\pi Zk}{180} = 2\pi$

すなわち、 $Zk = 180$  になり立つ。この式は、

$Z$  が 180 の約数であることを意味している。

44 以下の 180 の約数は、

1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18,  
20, 30, 36,

で合計 14 個である。これから  $Z$  とするとき、

$k = \frac{180}{Z}$  は、3 以上となり題意をみたす。よって

このように  $Z$  が書かれたカードを 31 枚

確率は  $\frac{14}{44} = \frac{7}{22}$  である。

(以下には記入しないこと)

II (2)(iii)